南京大学
《高等代数》教学改革

丁南庆

南京大学数学系

福建省“高等代数”与“线性代数”课程建设研讨会
华侨大学
2019年11月17日

目录

本科教学改革的重要性

- 高等学校的中心任务是人才培养.

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日，

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日， 教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调:

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日， 教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调： **高教大计、本科为本，本科不牢、地动山摇.**

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的**核心标准**.
- 2018 年 6 月 21 日，教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调：**高教大计、本科为本，本科不牢、地动山摇.**
- 深化本科教育教学改革，

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日, 教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调: **高教大计、本科为本, 本科不牢、地动山摇.**
- 深化本科教育教学改革, 可以为“双一流”建设**营造良好的学术生态环境**,

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日， 教育部长陈宝生在 “新时代全国本科教育工作会议” 上强调： **高教大计、本科为本，本科不牢、地动山摇.**
- 深化本科教育教学改革， 可以为 “双一流” 建设营造良好的学术生态环境， 为推进世界一流大学建设做出积极贡献.

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的核心标准.
- 2018 年 6 月 21 日，教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调：**高教大计、本科为本，本科不牢、地动山摇.**
- 深化本科教育教学改革，可以为“双一流”建设**营造良好的学术生态环境**，为推进世界一流大学建设**做出积极贡献**.
- 一流本科教育是“双一流”建设的**核心任务和重要基础**.

- 高等学校的中心任务是人才培养. 一流人才培养能力是衡量一流大学的**核心标准**.
- 2018 年 6 月 21 日，教育部长陈宝生在“新时代全国本科教育工作会议”上强调：**高教大计、本科为本，本科不牢、地动山摇**.
- 深化本科教育教学改革，可以为“双一流”建设**营造良好的学术生态环境**，为推进世界一流大学建设**做出积极贡献**.
- 一流本科教育是“双一流”建设的**核心任务和重要基础**. 一流大学必须有一流的本科教育滋养.

南京大学本科教学改革

- 南京大学素有重视本科教育的传统，

- 南京大学素有重视本科教育的传统，有打造卓越教学的良好基础.

- 南京大学素有重视本科教育的传统， 有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年,

- 南京大学素有重视本科教育的传统，有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年，南京大学正式开启了以构建和实施本科人才培养新体系为核心的“三三制”本科教学改革.

- 南京大学素有重视本科教育的传统， 有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年， 南京大学正式开启了以构建和实施本科人才培养新体系为核心的“三三制”本科教学改革.
- “三三制”培养模式:

- 南京大学素有重视本科教育的传统, 有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年, 南京大学正式开启了以构建和实施本科人才培养新体系为核心的“三三制”本科教学改革.
- “三三制”培养模式:

$$\underbrace{\text{大类培养}-\text{专业培养}-\text{多元培养}}_{\text{三个培养阶段}}$$

- 南京大学素有重视本科教育的传统，有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年，南京大学正式开启了以构建和实施本科人才培养新体系为核心的“三三制”本科教学改革.
- “三三制”培养模式:

$$\underbrace{\text{大类培养} - \text{专业培养} - \text{多元培养}}_{\text{三个培养阶段}}\ \underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{专业学术类}\\ \text{交叉复合类}\\ \text{就业创业类}\end{array}\right.}_{\text{三条发展路径}}$$

- 南京大学素有重视本科教育的传统，有打造卓越教学的良好基础.
- 2009 年，南京大学正式开启了以构建和实施本科人才培养新体系为核心的“三三制”本科教学改革.
- “三三制”培养模式:

$$\underbrace{\text{大类培养 — 专业培养 — 多元培养}}_{\text{三个培养阶段}}\ \underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{专业学术类}\\ \text{交叉复合类}\\ \text{就业创业类}\end{array}\right.}_{\text{三条发展路径}}$$

- 2014 年，南京大学“三三制”本科教学改革荣获国家级教学成果特等奖

- 2014 年，南京大学“三三制”本科教学改革荣获国家级教学成果特等奖

- 2016 年，

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，以教学质量提升为导向，

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，以教学质量提升为导向，开展南京大学“十百千”优质课程建设工作.

- 2016 年， 南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领， 以教学质量提升为导向， 开展南京大学“十百千”优质课程建设工作.
- 2017 年，

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，以教学质量提升为导向，开展南京大学“十百千”优质课程建设工作.
- 2017 年，南京大学开始实施大类招生，

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，以教学质量提升为导向，开展南京大学“十百千”优质课程建设工作.
- 2017 年，南京大学开始实施大类招生，完善以个性化培养、自主性选择、多元化发展为特征的“三三制”模式.

- 2016 年，南京大学继续以“办中国最好的本科教育”为引领，以教学质量提升为导向，开展南京大学“十百千”优质课程建设工作.
- 2017 年，南京大学开始实施大类招生，完善以个性化培养、自主性选择、多元化发展为特征的“三三制”模式.

- 2018 年，

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目.

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，南京大学有 5 个项目获一等奖，

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，南京大学有 5 个项目获一等奖，一等奖获得数位居全国高校第一，

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，南京大学有 5 个项目获一等奖，一等奖获得数位居全国高校第一，占 2018 年高等教育国家级教学成果奖一等奖总数的 10%.

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，南京大学有 5 个项目获一等奖，一等奖获得数位居全国高校第一，占 2018 年高等教育国家级教学成果奖一等奖总数的 10%. 这充分展示了南京大学在教学教育改革和创新人才培养方面的成绩，

- 2018 年，南京大学在国家级教学成果奖中，作为独立完成单位共有 9 个获奖项目. 另外，还有两个作为合作单位的项目获奖.
- 在获奖项目中，南京大学有 5 个项目获一等奖，一等奖获得数位居全国高校第一，占 2018 年高等教育国家级教学成果奖一等奖总数的 10%. 这充分展示了南京大学在教学教育改革和创新人才培养方面的成绩，也是南京大学办最好的本科教育的最好诠释.

- 2019 年 4 月 17 日，

- 2019 年 4 月 17 日，南京大学召开新时代本科教育工作会议，

- 2019 年 4 月 17 日， 南京大学召开新时代本科教育工作会议， 旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神，

- 2019 年 4 月 17 日，南京大学召开新时代本科教育工作会议，旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神，紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标，

- 2019 年 4 月 17 日， 南京大学召开新时代本科教育工作会议， 旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神， 紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标， 落实立德树人第一使命，

- 2019 年 4 月 17 日， 南京大学召开新时代本科教育工作会议， 旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神， 紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标， 落实立德树人第一使命， 打造最好本科第一品牌.

- 2019 年 4 月 17 日，南京大学召开新时代本科教育工作会议，旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神，紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标，落实立德树人第一使命，打造最好本科第一品牌.
- 2014 年 5 月 4 日，

- 2019 年 4 月 17 日， 南京大学召开新时代本科教育工作会议， 旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神， 紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标， 落实立德树人第一使命， 打造最好本科第一品牌.
- 2014 年 5 月 4 日，习近平在北京大学师生座谈会上的讲话：

- 2019 年 4 月 17 日，南京大学召开新时代本科教育工作会议，旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神，紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标，落实立德树人第一使命，打造最好本科第一品牌.
- 2014 年 5 月 4 日，习近平在北京大学师生座谈会上的讲话：世界上不会有第二个哈佛、牛津、斯坦福、麻省理工、剑桥，

- 2019 年 4 月 17 日，南京大学召开新时代本科教育工作会议，旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神，紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标，落实立德树人第一使命，打造最好本科第一品牌.
- 2014 年 5 月 4 日，习近平在北京大学师生座谈会上的讲话：世界上不会有第二个哈佛、牛津、斯坦福、麻省理工、剑桥，但会有第一个北大、清华、浙大、复旦、南大等中国著名学府.

- 2019 年 4 月 17 日， 南京大学召开新时代本科教育工作会议， 旨在落实全国教育大会和新时代全国高等学校本科教育工作会议精神， 紧紧围绕建设“第一个南大”的奋斗目标， 落实立德树人第一使命， 打造最好本科第一品牌.
- 2014 年 5 月 4 日，习近平在北京大学师生座谈会上的讲话： 世界上不会有第二个哈佛、牛津、斯坦福、麻省理工、剑桥， 但会有第一个北大、清华、浙大、复旦、南大等中国著名学府.

- 2019 年 9 月 10 日，

- 2019 年 9 月 10 日，南京大学获国家级教学成果一等奖获奖代表在京接受颁奖

- 2019 年 9 月 10 日， 南京大学获国家级教学成果一等奖获奖代表在京接受颁奖

- 2019 年 10 月 15 日，

- 2019 年 10 月 15 日， 全国首届教学大师奖、杰出教学奖、创新创业英才奖颁奖典礼在浙大举行，此次共颁发1项教学大师奖、5项杰出教学奖、10项创新创业英才奖。我校卢德馨教授获得杰出教学奖

- 2019年10月15日，全国首届教学大师奖、杰出教学奖、创新创业英才奖颁奖典礼在浙大举行，此次共颁发1项教学大师奖、5项杰出教学奖、10项创新创业英才奖。我校卢德馨教授获得杰出教学奖

南京大学《高等代数》课程教学改革

- 《高等代数》课程是数学系一年级学生的核心课，

- 《高等代数》课程是数学系一年级学生的核心课，也是大类招生模式下理科试验班（数理科学类）的公共基础课.

- 《高等代数》课程是数学系一年级学生的核心课，也是大类招生模式下理科试验班（数理科学类）的公共基础课.
- 原来每年修读《高等代数》的学生只有 150 人左右.

- 《高等代数》课程是数学系一年级学生的核心课，也是大类招生模式下理科试验班（数理科学类）的公共基础课.
- 原来每年修读《高等代数》的学生只有 150 人左右. 2017 年，除了数学系拔尖计划班的学生学习《高等代数》外，还有很多学生选修《高等代数》，修读总人数近 400 人！

- 《高等代数》课程是数学系一年级学生的核心课，也是大类招生模式下理科试验班（数理科学类）的公共基础课.
- 原来每年修读《高等代数》的学生只有 150 人左右. 2017 年，除了数学系拔尖计划班的学生学习《高等代数》外，还有很多学生选修《高等代数》，修读总人数近 400 人！
- 根据大类分流规定，数学系的准入课程是：数学分析、高等代数、解析几何.

- 2017 年，

- 2017 年，从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标.

- 2017 年， 从分流的情况看， 选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人, 但是选修数学系的学生有 200 人之多.

- 2017 年， 从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多.
- 2018 年，

- 2017 年，从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多.
- 2018 年，修读《高等代数》的人数略有减少，但是选数学的学生依然很多.

- 2017 年， 从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多.
- 2018 年， 修读《高等代数》的人数略有减少，但是选数学的学生依然很多.
- 2019 年，

- 2017 年， 从分流的情况看， 选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多.
- 2018 年， 修读《高等代数》的人数略有减少，但是选数学的学生依然很多.
- 2019 年， 选修数学分析、高等代数、解析几何的学生，必须参加学校组织的考试！

- 2017 年，从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标. 学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多.
- 2018 年，修读《高等代数》的人数略有减少，但是选数学的学生依然很多.
- 2019 年，选修数学分析、高等代数、解析几何的学生，必须参加学校组织的考试！考试通过后，方可选修！

- 2017 年，从分流的情况看，选数学系的学生远远超过学校给的指标．学校指标约 90 人，但是选修数学系的学生有 200 人之多．
- 2018 年，修读《高等代数》的人数略有减少，但是选数学的学生依然很多．
- 2019 年，选修数学分析、高等代数、解析几何的学生，必须参加学校组织的考试！考试通过后，方可选修！所以今年修读人数只有 200 人左右！

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设， 我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员：

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员：丁南庆、纪庆忠、郭学军、刘公祥.

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设， 我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员： 丁南庆、纪庆忠、郭学军、刘公祥.
- 改革计划:

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员：丁南庆、纪庆忠、郭学军、刘公祥.
- 改革计划: 把作为数学系专业基础课和理科试验班公共基础课的《高等代数》课程教学结合起来,

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员：丁南庆、纪庆忠、郭学军、刘公祥.
- 改革计划: 把作为数学系专业基础课和理科试验班公共基础课的《高等代数》课程教学结合起来，更新教学内容、加强教材建设、改进教学方法、提高课堂教学质量和效果，

- 围绕《高等代数》课程在新形势下的教改和建设，我已经组建了一个老中青相结合的教学团队.
- 团队成员：丁南庆、纪庆忠、郭学军、刘公祥.
- 改革计划: 把作为数学系专业基础课和理科试验班公共基础课的《高等代数》课程教学结合起来，更新教学内容、加强教材建设、改进教学方法、提高课堂教学质量和效果，以适应南京大学“三三制”培养方案的要求.

我们希望本课程的改革有利于：

我们希望本课程的改革有利于:

- 激发学生的学习兴趣.

我们希望本课程的改革有利于：

- 激发学生的学习兴趣．通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”，激发学生的“数学情结”！

我们希望本课程的改革有利于：

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”，激发学生的“数学情结”！
- 启发学生独立思考问题.

我们希望本课程的改革有利于:

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”, 激发学生的“数学情结”!
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟!

我们希望本课程的改革有利于:

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”, 激发学生的“数学情结”!
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟! 如果我们只教学生已知的一些东西是不够的,

我们希望本课程的改革有利于:

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的"数学情节", 激发学生的"数学情结"!
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟! 如果我们只教学生已知的一些东西是不够的, 学生必须知道如何去发现尚未被发现的东西.

我们希望本课程的改革有利于：

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”，激发学生的“数学情结”！
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟！ 如果我们只教学生已知的一些东西是不够的， 学生必须知道如何去发现尚未被发现的东西.
- 培养学生良好的学术能力，

我们希望本课程的改革有利于：

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”，激发学生的“数学情结”！
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟！ 如果我们只教学生已知的一些东西是不够的， 学生必须知道如何去发现尚未被发现的东西.
- 培养学生良好的学术能力, 即抽象理解能力、发现问题和解决问题的能力.

我们希望本课程的改革有利于：

- 激发学生的学习兴趣. 通过课程内容、教学方式、适当的“数学情节”，激发学生的“数学情结”！
- 启发学生独立思考问题. 数学概念主要依赖于长期思考后的顿悟！ 如果我们只教学生已知的一些东西是不够的， 学生必须知道如何去发现尚未被发现的东西.
- 培养学生良好的学术能力, 即抽象理解能力、发现问题和解决问题的能力.

教学内容与中学课程衔接

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接:

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接: 学生刚进大学, 对整数很熟悉, 有一种亲切感.

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接: 学生刚进大学, 对整数很熟悉, 有一种亲切感.
- 有利于学生学习多项式中的相关内容:

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接: 学生刚进大学, 对整数很熟悉, 有一种亲切感.
- 有利于学生学习多项式中的相关内容: 多项式理论与整数理论是类似的,

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接: 学生刚进大学, 对整数很熟悉, 有一种亲切感.
- 有利于学生学习多项式中的相关内容: 多项式理论与整数理论是类似的, 而后者是大家熟悉的.

这里以介绍整数环上的带余除法和中国剩余定理为例.

原因如下:

- 有利于和中学知识的衔接: 学生刚进大学, 对整数很熟悉, 有一种亲切感.
- 有利于学生学习多项式中的相关内容: 多项式理论与整数理论是类似的, 而后者是大家熟悉的.

带余除法

例题 1.

带余除法

例题 1. 设 m,n 是整数且 $n>0$. 证明存在唯一一对整数 q,r 使得 $m=qn+r$, 其中 $0\leqslant r<n$.

带余除法

例题 1. 设 m,n 是整数且 $n>0$. 证明存在唯一一对整数 q,r 使得 $m=qn+r$, 其中 $0\leqslant r<n$.

证. 这里只证**存在性**.

带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

分析:

带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

分析:

带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证**存在性.**

方法一（良序原理）

分析:

考虑集合 $S = \{m - kn | k \text{ 是整数且 } m - kn \geqslant 0\}$.

带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

分析:

考虑集合 $S = \{m - kn | k$ 是整数且 $m - kn \geqslant 0\}$.

- $0 \in S$.

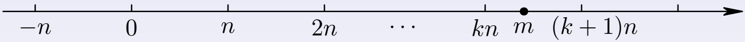
带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

分析:



考虑集合 $S = \{m - kn | k \text{ 是整数且 } m - kn \geqslant 0\}$.

- $0 \in S$. 此时存在整数 k 使得 $m = kn$.

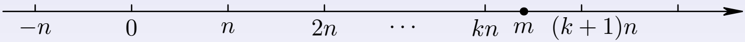
带余除法

例题 1. 设 m, n 是整数且 $n > 0$. 证明存在唯一一对整数 q, r 使得 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

证. 这里只证存在性.

方法一（良序原理）

分析:



考虑集合 $S = \{m - kn | k \text{ 是整数且 } m - kn \geqslant 0\}$.

- $0 \in S$. 此时存在整数 k 使得 $m = kn$.
  令 $q = k, r = 0$, 则 $m = qn + r$.

- $0 \notin S$.

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$,

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$, 从而 $m = qn + r$.

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$, 从而 $m = qn + r$.
  若 $r \geqslant n$, 则

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$, 从而 $m = qn + r$.
  若 $r \geqslant n$, 则
  $0 \leqslant m - (q+1)n = m - qn - n = r - n < r$,

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集，
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$, 从而 $m = qn + r$.
  若 $r \geqslant n$, 则
  $0 \leqslant m - (q + 1)n = m - qn - n = r - n < r$,
  与 $r = m - qn$ 是 S 中的最小数矛盾！

- $0 \notin S$. 此时 $m \neq 0$.
  (若 $m = 0$, 则 $0 = 0 - 0n = m - 0n \in S$, 矛盾！)
  若 $m > 0$, 则 $m = m - 0n \in S$.
  若 $m < 0$, 则 $m - (2m)n = m(1 - 2n) \in S$.
  由此可见，S 是自然数集合的非空子集,
  于是 S 中有一个最小数 r,
  即存在整数 q 使得 $m - qn = r$, 从而 $m = qn + r$.
  若 $r \geqslant n$, 则
  $0 \leqslant m - (q+1)n = m - qn - n = r - n < r$,
  与 $r = m - qn$ 是 S 中的最小数矛盾！
  故 $m = qn + r$, 其中 $0 \leqslant r < n$.

方法二（第二归纳法）

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

  （1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.
  （1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.
  （2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m + 1$ 的情形.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m + 1$ 的情形.

如果 $m + 1 < n$, 取 $q = 0, r = m + 1$ 即可.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

  （1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

  （2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

  现在考虑 $m + 1$ 的情形.

  如果 $m + 1 < n$, 取 $q = 0, r = m + 1$ 即可.

  下设 $m + 1 \geqslant n$.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m+1$ 的情形.

如果 $m+1 < n$, 取 $q = 0, r = m+1$ 即可.

下设 $m+1 \geqslant n$.

令 $m_1 = m+1-n$, 则 $0 \leqslant m_1 < m+1$.

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m + 1$ 的情形.

如果 $m + 1 < n$, 取 $q = 0, r = m + 1$ 即可.

下设 $m + 1 \geqslant n$.

令 $m_1 = m + 1 - n$, 则 $0 \leqslant m_1 < m + 1$.

由归纳假设可知，存在整数 q_1, r_1 使得

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m + 1$ 的情形.

如果 $m + 1 < n$, 取 $q = 0, r = m + 1$ 即可.

下设 $m + 1 \geqslant n$.

令 $m_1 = m + 1 - n$, 则 $0 \leqslant m_1 < m + 1$.

由归纳假设可知，存在整数 q_1, r_1 使得

$$m_1 = q_1 n + r_1, \text{其中 } 0 \leqslant r_1 < n.$$

方法二（第二归纳法）

- 首先假设 $m \geqslant 0$.

（1）当 $m = 0$ 时，取 $q = r = 0$ 即可.

（2）对任意 $m \geqslant 0$, 假设当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，存在性成立.

现在考虑 $m + 1$ 的情形.

如果 $m + 1 < n$, 取 $q = 0, r = m + 1$ 即可.

下设 $m + 1 \geqslant n$.

令 $m_1 = m + 1 - n$, 则 $0 \leqslant m_1 < m + 1$.

由归纳假设可知，存在整数 q_1, r_1 使得

$$m_1 = q_1 n + r_1, \text{其中 } 0 \leqslant r_1 < n.$$

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2,\ \text{其中}\ 0\leqslant r_2<n,$$

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
因此存在整数 q_2, r_2 使得

$$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$

从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
  从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
  如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
  从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
  如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-q_2, r=0.$$

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
  从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
  如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-q_2, r=0.$$
  如果 $r_2\neq 0$, 则 $m=(-1-q_2)n+n-r_2=qn+r$,

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
  从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
  如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-q_2, r=0.$$
  如果 $r_2\neq 0$, 则 $m=(-1-q_2)n+n-r_2=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-1-q_2, 0<r=n-r_2<n.$$

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
  因此存在整数 q_2, r_2 使得
  $$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
  从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
  如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-q_2, r=0.$$
  如果 $r_2\neq 0$, 则 $m=(-1-q_2)n+n-r_2=qn+r$,
  $$\text{其中 } q=-1-q_2, 0<r=n-r_2<n.$$
  由此可见，当 $m<0$ 时，存在性成立.

于是 $m+1=(1+q_1)n+r_1=qn+r$,
其中 $q=1+q_1, 0\leqslant r=r_1<n$.
由第二归纳法知，当 $m\geqslant 0$ 时，存在性成立.

- 若 $m<0$, 则 $-m>0$,
因此存在整数 q_2, r_2 使得
$$-m=q_2n+r_2, \text{其中 } 0\leqslant r_2<n,$$
从而 $m=(-q_2)n+(-r_2)$.
如果 $r_2=0$, 则 $m=qn+r$,
$$\text{其中 } q=-q_2, r=0.$$
如果 $r_2\neq 0$, 则 $m=(-1-q_2)n+n-r_2=qn+r$,
$$\text{其中 } q=-1-q_2, 0<r=n-r_2<n.$$
由此可见，当 $m<0$ 时，存在性成立.
故对任意整数 m, 存在性成立.

中国剩余定理

在我国古代《孙子算经》里有这样的问题：

中国剩余定理

在我国古代《孙子算经》里有这样的问题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”

中国剩余定理

在我国古代《孙子算经》里有这样的问题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”

这就是求一次同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7$$

的整数解.

中国剩余定理

在我国古代《孙子算经》里有这样的问题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

这就是求一次同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7$$

的整数解.

把孙子所用算法推广就有下面的定理.

中国剩余定理

例题 2.

中国剩余定理

例题 2. 假设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是两两互素的正整数，

中国剩余定理

例题 2. 假设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是两两互素的正整数， $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是任意 k 个整数，

中国剩余定理

例题 2. 假设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是两两互素的正整数， $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是任意 k 个整数， 则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

有整数解.

中国剩余定理

例题 2. 假设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是两两互素的正整数， $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是任意 k 个整数， 则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\text{mod } m_1) \\ x \equiv a_2 (\text{mod } m_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \equiv a_k (\text{mod } m_k) \end{cases}$$

有整数解. 若 x， x' 均为该同余方程组的解,

中国剩余定理

例题 2. 假设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是两两互素的正整数， $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是任意 k 个整数， 则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod\ m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod\ m_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \equiv a_k (\bmod\ m_k) \end{cases}$$

有整数解. 若 x， x' 均为该同余方程组的解， 则

$$x \equiv x' (\bmod\ m_1 m_2 \cdots m_k).$$

证.

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素,

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以，

$$(m_i, m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_im_i + t_im_1m_1\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_k.$$

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$,

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以，

$$(m_i, m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 \pmod{m_i}, r_i \equiv 0 \pmod{m_j}, j \neq i.$$

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 (\operatorname{mod} m_i), r_i \equiv 0 (\operatorname{mod} m_j), j \neq i.$$

取 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$,

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 \pmod{m_i}, r_i \equiv 0 \pmod{m_j}, j \neq i.$$

取 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$, 则

$$x \equiv a_i r_i \pmod{m_i} \equiv a_i \pmod{m_i}, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 (\operatorname{mod} m_i), r_i \equiv 0 (\operatorname{mod} m_j), j \neq i.$$

取 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$, 则

$$x \equiv a_i r_i (\operatorname{mod} m_i) \equiv a_i (\operatorname{mod} m_i), 1 \leqslant i \leqslant k.$$

若 x, x' 均为同余方程组的解,

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以，

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 (\bmod m_i), r_i \equiv 0 (\bmod m_j), j \neq i.$$

取 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$, 则

$$x \equiv a_i r_i (\bmod m_i) \equiv a_i (\bmod m_i), 1 \leqslant i \leqslant k.$$

若 x， x' 均为同余方程组的解， 则 $m_i | x - x', i = 1, 2, \cdots, k$. 由于 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素，

证. 因为 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素， 所以,

$$(m_i, m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k) = 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

于是存在整数 s_i, t_i 使得

$$1 = s_i m_i + t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k.$$

令 $r_i = 1 - s_i m_i = t_i m_1 m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$, 则

$$r_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m_i), r_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m_j), j \neq i.$$

取 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$, 则

$$x \equiv a_i r_i (\mathrm{mod}\ m_i) \equiv a_i (\mathrm{mod}\ m_i), 1 \leqslant i \leqslant k.$$

若 x， x' 均为同余方程组的解， 则 $m_i | x - x', i = 1, 2, \cdots, k$. 由于 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素, 所以 $m_1 m_2 \cdots m_k | x - x'$, 即 $x \equiv x' (\mathrm{mod}\ m_1 m_2 \cdots m_k)$. □

例题 3.

例题 3. 解同余方程组

例题 3. 解同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$$

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$

解.

例题 3. 解同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$$

解. 首先，$(3, 35) = 1$.

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 (\bmod\ 3), x \equiv 3 (\bmod\ 5), x \equiv 2 (\bmod\ 7).$

解. 首先，$(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35,$

例题 3. 解同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$$

解. 首先，$(3, 35) = 1$.

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$.

解. 首先，$(3, 35) = 1$.

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5, 21) = 1$.

例题 3. 解同余方程组

$$x \equiv 2 (\bmod 3), x \equiv 3 (\bmod 5), x \equiv 2 (\bmod 7).$$

解. 首先，$(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5, 21) = 1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$,

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$

解. 首先，$(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次， $(5, 21) = 1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7).$

解. 首先，$(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5, 21) = 1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次，$(7, 15) = 1.$

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7.$

解. 首先，$(3,35)=1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5,21)=1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次，$(7,15)=1.$

因为 $1 = (-7) \cdot 5 + 15,$

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$

解. 首先，$(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5, 21) = 1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次，$(7, 15) = 1.$

因为 $1 = (-7) \cdot 5 + 15$, 所以取 $r_3 = 15$.

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$.

解. 首先，$(3, 35) = 1$.

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5, 21) = 1$.

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次，$(7, 15) = 1$.

因为 $1 = (-7) \cdot 5 + 15$, 所以取 $r_3 = 15$.

于是，$x = 2 \cdot (-35) + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 23$ 就是原方程组的解.

例题 3. 解同余方程组

$x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$

解. 首先，$(3,35)=1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次，$(5,21)=1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次，$(7,15)=1.$

因为 $1 = (-7) \cdot 5 + 15$, 所以取 $r_3 = 15$.

于是，$x = 2 \cdot (-35) + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 23$ 就是原方程组的解.

易见，方程组的所有解为：$23 + 105 \cdot k$, 其中 k 为整数,

例题 3. 解同余方程组

$$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5), x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7).$$

解. 首先, $(3, 35) = 1.$

因为 $1 = 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35$, 所以取 $r_1 = -35$.

其次, $(5, 21) = 1.$

因为 $1 = (-4) \cdot 5 + 21$, 所以取 $r_2 = 21$.

再次, $(7, 15) = 1.$

因为 $1 = (-7) \cdot 5 + 15$, 所以取 $r_3 = 15$.

于是, $x = 2 \cdot (-35) + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 23$ 就是原方程组的解.

易见, 方程组的所有解为: $23 + 105 \cdot k$, 其中 k 为整数, 23 是方程组的最小正整数解. □

例题 4.

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解.

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2+2x = q_2(x)(x-2)^3+3x$,

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2+2x = q_2(x)(x-2)^3+3x$,
其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2+2x = q_2(x)(x-2)^3+3x$, 其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2+2x$

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x)=q_1(x)(x-1)^2+2x=q_2(x)(x-2)^3+3x$,

其中 $q_1(x),q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2+2x$

$=q_2(x)((x-1)-1)^3+3x$

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x)=q_1(x)(x-1)^2+2x=q_2(x)(x-2)^3+3x$,
其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2+2x$

$$=q_2(x)((x-1)-1)^3+3x$$

$$=q_2(x)((x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1)+3x.$$

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2+2x = q_2(x)(x-2)^3+3x$, 其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2+2x$

$= q_2(x)((x-1)-1)^3+3x$

$= q_2(x)((x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1)+3x.$

于是 $[q_1(x)-q_2(x)(x-1)+3q_2(x)](x-1)^2$

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2+2x = q_2(x)(x-2)^3+3x$, 其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2+2x$

$= q_2(x)((x-1)-1)^3+3x$

$= q_2(x)((x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1)+3x.$

于是 $[q_1(x)-q_2(x)(x-1)+3q_2(x)](x-1)^2$

$= q_2(x)(3x-4)+x,$

例题 4. 求一个次数最低的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

解. 方法一（利用定义）

设 $f(x) = q_1(x)(x-1)^2 + 2x = q_2(x)(x-2)^3 + 3x$,

其中 $q_1(x), q_2(x)$ 是多项式,

则 $q_1(x)(x-1)^2 + 2x$

$= q_2(x)((x-1)-1)^3 + 3x$

$= q_2(x)((x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1) + 3x.$

于是 $[q_1(x) - q_2(x)(x-1) + 3q_2(x)](x-1)^2$

$= q_2(x)(3x-4) + x,$

从而 $(x-1)^2 \mid q_2(x)(3x-4) + x.$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0.$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x \neq 0$.
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

注意 $q_2(x)(3x-4)+x \neq 0$.
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,
从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

注意 $q_2(x)(3x-4)+x \neq 0$.
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,
从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数，
但是， 由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0$.

(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

但是，由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)

因此， $\partial(q_2(x)\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.

注意 $q_2(x)(3x-4)+x \neq 0$.

(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

但是, 由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾!)

因此, $\partial(q_2(x)\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.

设 $q_2(x)=Ax+B$,

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0$.
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,
从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,
但是, 由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾!)
因此, $\partial(q_2(x))\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.
设 $q_2(x)=Ax+B$, 则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0$.

(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

但是，由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)

因此， $\partial(q_2(x)\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.

设 $q_2(x)=Ax+B$，则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

即 $3Ax^2+(3B-4A+1)x-4B=3A-6Ax+3A$.

注意 $q_2(x)(3x-4)+x \neq 0$.

(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

但是, 由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾!)

因此, $\partial(q_2(x)) \geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.

设 $q_2(x)=Ax+B$, 则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

即 $3Ax^2+(3B-4A+1)x-4B=3A-6Ax+3A$.

$$故 \left\{ \begin{array}{rcl} 3B-4A+1 & = & -6A \\ -4B & = & 3A, \end{array} \right.$$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0$.

(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,

从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,

但是，由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)

因此，$\partial(q_2(x))\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.

设 $q_2(x)=Ax+B$, 则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

即 $3Ax^2+(3B-4A+1)x-4B=3A-6Ax+3A$.

故 $\begin{cases} 3B-4A+1 &= -6A \\ -4B &= 3A, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A &= 4 \\ B &= -3. \end{cases}$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0.$
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,
从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,
但是, 由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)
因此, $\partial(q_2(x)\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.
设 $q_2(x)=Ax+B$, 则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

即 $3Ax^2+(3B-4A+1)x-4B=3A-6Ax+3A.$

故 $\begin{cases} 3B-4A+1 &= -6A \\ -4B &= 3A, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A &= 4 \\ B &= -3. \end{cases}$

所以 $f(x)=(4x-3)(x-2)^2+3x$

注意 $q_2(x)(3x-4)+x\neq 0$.
(若 $q_2(x)(3x-4)+x=0$, 则 $q_2(x)(3x-4)=-x$,
从而 $q_2(x)=c$ 为非零常数,
但是，由 $c(3x-4)=-x$ 知 $c=0$, 矛盾！)
因此，$\partial(q_2(x)\geqslant 1$, 即 $q_2(x)$ 的次数最低为 1.
设 $q_2(x)=Ax+B$, 则

$$(Ax+B)(3x-4)+x=3A(x-1)^2,$$

即 $3Ax^2+(3B-4A+1)x-4B=3A-6Ax+3A$.

故 $\begin{cases} 3B-4A+1 = -6A \\ -4B = 3A, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = 4 \\ B = -3. \end{cases}$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x-3)(x-2)^2+3x \\ &= 4x^4-27x^3+66x^2-65x+24. \end{aligned}$$

方法二（利用中国剩余定理）

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$(x-2)^3 = ((x-1)-1)^3$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\
&= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1
\end{aligned}
$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\
&= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 \\
&= (x-4)(x-1)^2 + 3x - 4,
\end{aligned}
$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\ &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 \\ &= (x-4)(x-1)^2 + 3x - 4,\end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)(3x-4) + \tfrac{1}{9}.$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3\\ &= (x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1\\ &= (x-4)(x-1)^2+3x-4,\end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = \left(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9}\right)(3x-4)+\tfrac{1}{9}.$$

因此，

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\
&= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 \\
&= (x-4)(x-1)^2 + 3x - 4,
\end{aligned}
$$

$$(x-1)^2 = \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)(3x-4) + \tfrac{1}{9}.$$

因此，

$$\tfrac{1}{9} = (x-1)^2 - \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)(3x-4)$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\
&= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 \\
&= (x-4)(x-1)^2 + 3x - 4,
\end{aligned}
$$

$$(x-1)^2 = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(3x-4) + \tfrac{1}{9}.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{9} &= (x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(3x-4) \\
&= (x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})[(x-2)^3 - (x-4)(x-1)^2]
\end{aligned}
$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3 \\
&= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 \\
&= (x-4)(x-1)^2 + 3x - 4,
\end{aligned}
$$

$$(x-1)^2 = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(3x-4) + \tfrac{1}{9}.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{9} &= (x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(3x-4) \\
&= (x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})[(x-2)^3 - (x-4)(x-1)^2] \\
&= [1 + (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(x-4)](x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9})(x-2)^3
\end{aligned}
$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3\\ &= (x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1\\ &= (x-4)(x-1)^2+3x-4,\end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = (\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(3x-4)+\tfrac{1}{9}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{9} &= (x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(3x-4)\\ &= (x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})[(x-2)^3-(x-4)(x-1)^2]\\ &= [1+(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-4)](x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-2)^3\\ &= (\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{14}{9}x+\tfrac{17}{9})(x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-2)^3,\end{aligned}$$

方法二（利用中国剩余定理）

首先，

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= ((x-1)-1)^3\\ &= (x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1\\ &= (x-4)(x-1)^2+3x-4,\end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = (\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(3x-4)+\tfrac{1}{9}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{9} &= (x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(3x-4)\\ &= (x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})[(x-2)^3-(x-4)(x-1)^2]\\ &= [1+(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-4)](x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-2)^3\\ &= (\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{14}{9}x+\tfrac{17}{9})(x-1)^2-(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{9})(x-2)^3,\end{aligned}$$

从而， $1=(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x-2)(x-2)^3$

于是，

于是，

$$2x$$

于是，

$$2x$$
$$=(2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

于是，

$$2x$$

$$= (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x$$

于是，

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

于是,

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x)$

于是,

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x) = -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$

于是，

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x)$

$$= -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$$

注意 $f_1(x)$ 的首项为 $-6x^5+9x^5=3x^5$.

于是，

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x)$

$$= -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$$

注意 $f_1(x)$ 的首项为 $-6x^5+9x^5=3x^5$.

令 $f(x)=f_1(x)-3(x-1)^2(x-2)^3$,

于是，

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x)$

$$= -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$$

注意 $f_1(x)$ 的首项为 $-6x^5+9x^5=3x^5$.

令 $f(x)=f_1(x)-3(x-1)^2(x-2)^3$,

则 $f(x)=4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$

于是，

$$2x = (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$$

$$3x = (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$$

令 $f_1(x)$

$$= -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$$

注意 $f_1(x)$ 的首项为 $-6x^5+9x^5=3x^5$.

令 $f(x)=f_1(x)-3(x-1)^2(x-2)^3$,

则 $f(x)=4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

于是,

$2x$

$= (2x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(2x)(3x-2)(x-2)^3,$

$3x$

$= (3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2-(3x)(3x-2)(x-2)^3.$

令 $f_1(x)$

$= -(2x)(3x-2)(x-2)^3+(3x)(3x^2-14x+17)(x-1)^2,$

注意 $f_1(x)$ 的首项为 $-6x^5+9x^5=3x^5$.

令 $f(x)=f_1(x)-3(x-1)^2(x-2)^3$,

则 $f(x)=4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$ 被 $(x-1)^2$ 除余 $2x$, 并且被 $(x-2)^3$ 除余 $3x$.

易见, $f(x)$ 是满足条件的次数最低的多项式. □

教学内容与后继课程衔接

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理 和

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理 和 华罗庚等式.

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理和华罗庚等式.
- 目的是通过相应的“数学情节”激发学生的“数学情结”.

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理 和 华罗庚等式.
- 目的是通过相应的“数学情节”激发学生的“数学情结”.
- 有利于《高等代数》与后继课程《近世代数》的衔接,

- 这里主要介绍矩阵环上的 Jacobson 引理 和 华罗庚等式.
- 目的是通过相应的“数学情节”激发学生的“数学情结”.
- 有利于《高等代数》与后继课程《近世代数》的衔接，为学生在《近世代数》课程中学习一般（有单位元）的环上的相应结论做准备.

Jacobson 引理

例题 5.

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E - AB$ 可逆，证明：$E - BA$ 可逆，并求 $(E - BA)^{-1}$.

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上,

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，$E = E - BA + BA$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \end{aligned}$$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \end{aligned}$$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A \end{aligned}$$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$\begin{aligned}E &= E-BA+BA\\ &= E-BA+BEA\\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\ &= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\ &= E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\end{aligned}$$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A \\ &= (E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A), \end{aligned}$$

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，

$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A \\ &= (E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A), \end{aligned}$$

所以 $E-BA$ 可逆，

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，

$$\begin{aligned} E &= E-BA+BA \\ &= E-BA+BEA \\ &= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A \\ &= E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A \\ &= (E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A), \end{aligned}$$

所以 $E-BA$ 可逆，并且

Jacobson 引理

例题 5. 设 A, B 都是 n 级方阵, E 是 n 级单位矩阵. 如果 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆，并求 $(E-BA)^{-1}$.

证. 只要找一个 n 级方阵 X 使得 $(E-BA)X=E$.

事实上，
$$
\begin{aligned}
E &= E-BA+BA \\
&= E-BA+BEA \\
&= E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A \\
&= E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A \\
&= E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A \\
&= (E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A),
\end{aligned}
$$
所以 $E-BA$ 可逆，并且
$$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A. \quad \square$$

怎么想到这个证明？

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

大家知道， $1-x^2=(1+x)(1-x)$

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道， $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$

一般情况下，

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道， $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

大家知道, $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下,

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道， $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道， $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1 - x^n = (1 + x + \cdots + x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x| < 1$, 则

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

假设 $(E - BA)^{-1}$ 可以形式地展开：

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

大家知道，$1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

假设 $(E-BA)^{-1}$ 可以形式地展开:

$$(E-BA)^{-1}$$

$$=E+BA+BABA+BABABA+BABABABA+\cdots,$$

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道，$1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

假设 $(E-BA)^{-1}$ 可以形式地展开：

$(E-BA)^{-1}$

$$=E+BA+BABA+BABABA+BABABABA+\cdots,$$

则 $(E-BA)^{-1}$

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

大家知道, $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下,

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

假设 $(E-BA)^{-1}$ 可以形式地展开:

$(E-BA)^{-1}$

$=E+BA+BABA+BABABA+BABABABA+\cdots,$

则 $(E-BA)^{-1}$

$=E+B(E+AB+ABAB+ABABAB+\cdots)A$

怎么想到这个证明?

为什么叫 Jacobson 引理?

大家知道, $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下,

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

假设 $(E-BA)^{-1}$ 可以形式地展开:

$(E-BA)^{-1}$

$=E+BA+BABA+BABABA+BABABABA+\cdots,$

则 $(E-BA)^{-1}$

$=E+B(E+AB+ABAB+ABABAB+\cdots)A$

$=E+B(E-AB)^{-1}A.$

怎么想到这个证明？

为什么叫 Jacobson 引理？

大家知道， $1-x^2=(1+x)(1-x)$

一般情况下，

$$1-x^n=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x).$$

若 $|x|<1$, 则

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

假设 $(E-BA)^{-1}$ 可以形式地展开：

$(E-BA)^{-1}$

$=E+BA+BABA+BABABA+BABABABA+\cdots,$

则 $(E-BA)^{-1}$

$=E+B(E+AB+ABAB+ABABAB+\cdots)A$

$=E+B(E-AB)^{-1}A.$

事实上,

事实上,

$$(E - BA)(E + B(E - AB)^{-1}A)$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
=\ &E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
&=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
=\ &E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
=\ &E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+BA
\end{aligned}
$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
&=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+BA\\
&=E.
\end{aligned}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
=\ &E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+BA\\
=\ &E.
\end{aligned}
$$

由此可见，

事实上,

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
=\ &E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
=\ &E-BA+BA\\
=\ &E.
\end{aligned}
$$

由此可见, $(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A.$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
&=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+BA\\
&=E.
\end{aligned}
$$

由此可见， $(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A.$

Halmos 把前面这个技巧归功于 Jacobson,

事实上，

$$
\begin{aligned}
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
&=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+BA\\
&=E.
\end{aligned}
$$

由此可见，$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A$.

Halmos 把前面这个技巧归功于 Jacobson，尽管这个计算小技巧并没有形成引理的完整证明！

华罗庚等式

例题 6.

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB - E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵.

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB - E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A - B^{-1}$ 与 $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A - B^{-1})^{-1} - A^{-1})^{-1}.$$

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证.

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB - E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A - B^{-1}$ 与 $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A - B^{-1})^{-1} - A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，由于 $A - B^{-1}$

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，由于 $A-B^{-1}$

$$= ABB^{-1}-EB^{-1}$$

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，由于

$$\begin{aligned} A-B^{-1} &= A{\color{blue}BB^{-1}}-EB^{-1} \\ &= (AB-E)B^{-1}, \end{aligned}$$

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，由于
$$\begin{aligned} A-B^{-1} &= ABB^{-1}-EB^{-1} \\ &= (AB-E)B^{-1}, \end{aligned}$$
所以，$A-B^{-1}$ 可逆，

华罗庚等式

例题 6. 设 $A, B, AB-E$ 都是 n 级可逆矩阵，其中 E 是 n 级单位矩阵. 证明：$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆，并求

$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}.$$

证. 首先，由于 $A-B^{-1}$

$$\begin{aligned} &= ABB^{-1}-EB^{-1} \\ &= (AB-E)B^{-1}, \end{aligned}$$

所以，$A-B^{-1}$ 可逆，

并且 $(A-B^{-1})^{-1}=B(AB-E)^{-1}$.

其次，

其次，因为

其次， 因为

$$(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$$

其次，因为

$$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$$
$$=B(AB-E)^{-1}-A^{-1}$$

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1} \\
= &B(AB - E)^{-1} - A^{-1} \\
= &A^{-1}AB(AB - E)^{-1} - A^{-1}E
\end{aligned}
$$

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=&B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=&A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)
\end{aligned}
$$

其次， 因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=\ &B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=\ &A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=\ &A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)\\
=\ &A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1})
\end{aligned}
$$

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=&B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=&A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1})\\
=&A^{-1}(AB-E)^{-1}
\end{aligned}
$$

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=\ &B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=\ &A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=\ &A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)\\
=\ &A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1})\\
=\ &A^{-1}(AB-E)^{-1}
\end{aligned}
$$

所以，$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆，

其次，因为

$$
\begin{aligned}
& (A-B^{-1})^{-1}-A^{-1} \\
= & B(AB-E)^{-1}-A^{-1} \\
= & A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E \\
= & A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E) \\
= & A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1}) \\
= & A^{-1}(AB-E)^{-1}
\end{aligned}
$$

所以，$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆，并且

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=&B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=&A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1})\\
=&A^{-1}(AB-E)^{-1}
\end{aligned}
$$

所以，$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆，并且 $((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=ABA-A.$ $\square$

其次，因为

$$
\begin{aligned}
&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\
=&B(AB-E)^{-1}-A^{-1}\\
=&A^{-1}AB(AB-E)^{-1}-A^{-1}E\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-E)\\
=&A^{-1}(AB(AB-E)^{-1}-(AB-E)(AB-E)^{-1})\\
=&A^{-1}(AB-E)^{-1}
\end{aligned}
$$

所以，$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆，并且

$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=ABA-A.$ □

上述等式称为华罗庚等式.

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=&[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=&[B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1}\\
=&[B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
& [(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & -[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
& [(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & -[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1} \\
= & -[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &-[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1}\\
=\ &-[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1}\\
=\ &-[(E-BA)^{-1}A^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
& [(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & [-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
= & -[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1} \\
= & -[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1} \\
= & -[(E-BA)^{-1}A^{-1}]^{-1} \\
= & -A(E-BA)
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B\underline{((A-B^{-1})B)}^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &[-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1}\\
=\ &-[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1}\\
=\ &-[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1}\\
=\ &-[(E-BA)^{-1}A^{-1}]^{-1}\\
=\ &-A(E-BA)\\
=\ &A(BA-E)
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
&[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
&= [BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
&= [B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1} \\
&= [B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
&= [-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
&= -[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1} \\
&= -[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1} \\
&= -[(E-BA)^{-1}A^{-1}]^{-1} \\
&= -A(E-BA) \\
&= A(BA-E) \\
&= ABA-A,
\end{aligned}
$$

其实，可以用 Jacobson 引理证明华罗庚等式：

$$
\begin{aligned}
& [(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
={}& [BB^{-1}(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
={}& [B\underline{((A-B^{-1})B)^{-1}}-A^{-1}]^{-1} \\
={}& [B(AB-E)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
={}& [-B(E-AB)^{-1}-A^{-1}]^{-1} \\
={}& -[(A^{-1}+B(E-AB)^{-1}AA^{-1})]^{-1} \\
={}& -[(E+B(E-AB)^{-1}A)A^{-1}]^{-1} \\
={}& -[(E-BA)^{-1}A^{-1}]^{-1} \\
={}& -A(E-BA) \\
={}& A(BA-E) \\
={}& ABA-A,
\end{aligned}
$$

即 $((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=ABA-A.$ $\square$

做习题与做研究衔接

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”， 不习惯自己去“探索”！ 通过习题的设置，

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”， 不习惯自己去“探索”！ 通过习题的设置， 培养学生研究性学习的能力，

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？能否改进？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？能否改进？如果逆命题成立，

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？能否改进？如果逆命题成立，如何证明？

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？能否改进？如果逆命题成立，如何证明？

（4）构建自己的知识结构，增强自我发展能力和创新意识.

做习题与做研究的衔接

不少学生平时习惯于依赖“标准答案”，不习惯自己去“探索”！通过习题的设置，培养学生研究性学习的能力，帮助学生学会提问题：

（1）提出自己的问题：习题（或定理）的条件是否必要？逆命题是否成立？

（2）找出自己的例子：如果逆命题不成立，反例是什么？

（3）给出自己的证明：证明中哪些地方用了假设条件？能否改进？如果逆命题成立，如何证明？

（4）构建自己的知识结构，增强自我发展能力和创新意识.

例题

例题 7.

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F=\{0,1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F = \{0, 1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

令 $f(x) = x^2 + 1,$

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F=\{0,1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

令 $f(x)=x^2+1$,

$g(x)=x+1$,

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F = \{0, 1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

令 $f(x) = x^2 + 1$,

$g(x) = x + 1$,

则 $f(x), g(x) \in F[x]$, 而且 $f(x) \neq g(x)$.

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F=\{0,1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

令 $f(x)=x^2+1,$

$g(x)=x+1,$

则 $f(x),g(x)\in F[x]$, 而且 $f(x)\neq g(x)$.

但是, $f(\alpha)=g(\alpha),\forall\alpha\in F$.

例题

例题 7. 数域(无限域)上两个多项式的相等和恒等是一致的. 举例说明有限域上这个结论不成立!

解. 设 $F = \{0, 1\}$ 是二元域, $F[x]$ 表示 F 上的一元多项式环.

令 $f(x) = x^2 + 1$,

$g(x) = x + 1$,

则 $f(x), g(x) \in F[x]$, 而且 $f(x) \neq g(x)$.

但是, $f(\alpha) = g(\alpha), \forall \alpha \in F$.

由此可见, F 上不同的多项式定义了相同的函数. $\square$

例题

例题 8.

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵.

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$,

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$.

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

解.

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $A^* = B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

例题

例题 8. 设 A, B 都是 n 级方阵. 如果 $A = B$, 则 $A^* = B^*$. 反之如何?

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $A^* = B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 但是, $A \neq B$.

例题

例题 9.

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明：秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证.

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明：秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 因为 $A(A-E) = A^2 - A = 0$,

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证. 因为 $A(A - E) = A^2 - A = 0$,

$$\text{所以 } \ \text{秩}(A) + \text{秩}(A - E) \leqslant n.$$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证. 因为 $A(A - E) = A^2 - A = 0$,

所以 秩(A) + 秩$(A - E) \leqslant n$.

又因为 秩(A) + 秩$(A - E)$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证. 因为 $A(A - E) = A^2 - A = 0$,

$$\text{所以}\ \ \text{秩}(A) + \text{秩}(A - E) \leqslant n.$$

$$\begin{aligned}\text{又因为}\quad &\text{秩}(A) + \text{秩}(A - E)\\ &= \text{秩}(A) + \text{秩}(E - A)\end{aligned}$$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 因为 $A(A-E) = A^2 - A = 0$,

$$\text{所以}\quad 秩(A) + 秩(A-E) \leqslant n.$$

$$\begin{aligned} \text{又因为}\quad & 秩(A) + 秩(A-E) \\ = {} & 秩(A) + 秩(E-A) \\ \geqslant {} & 秩(A+E-A) \end{aligned}$$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 因为 $A(A-E) = A^2 - A = 0$,

所以 秩(A) + 秩$(A-E) \leqslant n$.

又因为

$$
\begin{aligned}
& \text{秩}(A) + \text{秩}(A-E) \\
= & \text{秩}(A) + \text{秩}(E-A) \\
\geqslant & \text{秩}(A+E-A) \\
= & \text{秩}(E)
\end{aligned}
$$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 因为 $A(A-E) = A^2 - A = 0$,

所以 秩(A) + 秩$(A-E) \leqslant n$.

$$
\begin{aligned}
\text{又因为}\quad & \text{秩}(A) + \text{秩}(A-E) \\
&= \text{秩}(A) + \text{秩}(E-A) \\
&\geqslant \text{秩}(A+E-A) \\
&= \text{秩}(E) \\
&= n.
\end{aligned}
$$

例题

例题 9. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = A$, 证明: 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 因为 $A(A-E) = A^2 - A = 0$,

所以 秩(A) + 秩$(A-E) \leqslant n$.

$$
\begin{aligned}
\text{又因为}\quad & \text{秩}(A) + \text{秩}(A-E) \\
&= \text{秩}(A) + \text{秩}(E-A) \\
&\geqslant \text{秩}(A+E-A) \\
&= \text{秩}(E) \\
&= n.
\end{aligned}
$$

故 秩(A) + 秩$(A-E) = n$. $\square$

例题

例题 $9'$.

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow 秩(A) + 秩(A-E) = n.$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证.

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.
证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow 秩(A) + 秩(A-E) = n.$

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 $秩(A) + 秩(A-E)$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow 秩(A) + 秩(A-E) = n.$

证. 方法一(利用分块矩阵的初等变换)

因为 $秩(A) + 秩(A-E)$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩$(A) +$ 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩$(A) +$ 秩$(A-E)$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & E \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明： $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一 (利用分块矩阵的初等变换)

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= 秩(A-A^2) + n,$$

例题

例题 9′. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵.

证明: $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

证. 方法一（利用分块矩阵的初等变换）

因为 秩(A) + 秩$(A-E)$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & E \end{pmatrix} = 秩\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= 秩(A-A^2) + n,$$

所以 $A^2 = A \Longleftrightarrow$ 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（"$\Longrightarrow$"）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以，A 的最小多项式 $m(\lambda)|f(\lambda)$.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以，A 的最小多项式 $m(\lambda) | f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0,

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以， A 的最小多项式 $m(\lambda) | f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以， A 的最小多项式 $m(\lambda) | f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

设 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$,

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$, 则 $f(A)=0$.

所以，A 的最小多项式 $m(\lambda)|f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

设 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$, 其中 P 是可逆矩阵,

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以， A 的最小多项式 $m(\lambda) | f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

设 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$, 其中 P 是可逆矩阵， E_r 是 r 级单位矩阵,

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$, 则 $f(A)=0$.

所以， A 的最小多项式 $m(\lambda)|f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

设 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$, 其中 P 是可逆矩阵， E_r 是 r 级单位矩阵, 则 $A-E=P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}P$.

例题

方法二（利用特征值和特征向量）

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

令 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, 则 $f(A) = 0$.

所以，A 的最小多项式 $m(\lambda) | f(\lambda)$.

因此 A 的特征值为 1 或 0, 并且 A 相似于对角形.

设 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$, 其中 P 是可逆矩阵，E_r 是 r 级单位矩阵, 则 $A - E = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} P$.

所以 秩(A) + 秩$(A - E) = n$.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 $秩(A)+秩(A-E)=n$.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩$(A)+$秩$(A-E)=n$.

如果秩$(A)$$=0$ 或 秩$(A-E)$$=0$, 则 $A^2=A$.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩(A)= 0 或 秩$(A-E)$= 0, 则 $A^2 = A$.

下设 秩(A)= r, 则秩$(A-E)$= $n-r$, 其中 $0 < r < n$,

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩$(A)$$=0$ 或 秩$(A-E)$$=0$, 则 $A^2=A$.

下设 秩$(A)$$=r$, 则秩$(A-E)$$=n-r$, 其中 $0<r<n$,

则 $|A|=0$ 且 $|E-A|=0$,

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩$(A)+$秩$(A-E)=n$.

如果秩$(A)=0$ 或 秩$(A-E)=0$, 则 $A^2=A$.

下设 秩$(A)=r$, 则秩$(A-E)=n-r$, 其中 $0<r<n$,

则 $|A|=0$ 且 $|E-A|=0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩$(A)+$ 秩$(A-E)=n$.

如果秩$(A)$$=0$ 或 秩$(A-E)$$=0$, 则 $A^2=A$.

下设 秩$(A)$$=r$, 则秩$(A-E)$$=n-r$, 其中 $0<r<n$,

则 $|A|=0$ 且 $|E-A|=0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E-A)X=0$.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩$(A)+$秩$(A-E)=n$.

如果秩$(A)=0$ 或 秩$(A-E)=0$, 则 $A^2=A$.

下设 秩$(A)=r$, 则秩$(A-E)=n-r$, 其中 $0<r<n$,

则 $|A|=0$ 且 $|E-A|=0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E-A)X=0$.

当 $\lambda=0$, 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩$(A)= 0$ 或 秩$(A-E)= 0$, 则 $A^2 = A$.

下设 秩$(A)= r$, 则秩$(A-E)= n-r$, 其中 $0 < r < n$,

则 $|A| = 0$ 且 $|E-A| = 0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E - A)X = 0$.

当 $\lambda = 0$, 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda = 1$, 有 r 个线性无关的特征向量.

例题

充分性（"$\Longleftarrow$"）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩$(A)= 0$ 或 秩$(A-E)= 0$, 则 $A^2 = A$.

下设 秩$(A)= r$, 则秩$(A-E)= n-r$, 其中 $0 < r < n$,

则 $|A| = 0$ 且 $|E-A| = 0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E - A)X = 0$.

当 $\lambda = 0$, 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda = 1$, 有 r 个线性无关的特征向量.

于是，属于 0 和 1 共有 n 个线性无关的特征向量.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩$(A) = 0$ 或 秩$(A-E) = 0$, 则 $A^2 = A$.

下设 秩$(A) = r$, 则秩$(A-E) = n-r$, 其中 $0 < r < n$,

则 $|A| = 0$ 且 $|E-A| = 0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E - A)X = 0$.

当 $\lambda = 0$, 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda = 1$, 有 r 个线性无关的特征向量.

于是，属于 0 和 1 共有 n 个线性无关的特征向量.

因此 A 相似于对角线上为 0 或 1 对角形矩阵.

例题

充分性（“$\Longleftarrow$”）.

假设 秩(A) + 秩$(A-E) = n$.

如果秩(A)= 0 或 秩$(A-E)$= 0, 则 $A^2 = A$.

下设 秩(A)= r, 则秩$(A-E)$= $n-r$, 其中 $0 < r < n$,

则 $|A| = 0$ 且 $|E-A| = 0$,

因此，0 和 1 都是 A 的特征值.

考察方程 $(\lambda E - A)X = 0$.

当 $\lambda = 0$, 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda = 1$, 有 r 个线性无关的特征向量.

于是，属于 0 和 1 共有 n 个线性无关的特征向量.

因此 A 相似于对角线上为 0 或 1 对角形矩阵.

所以 $A^2 = A$. □

例题

例题 10.

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$.

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明:
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证.

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵，且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明：
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证. 因为

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明:
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证. 因为
$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |A||D - CA^{-1}B|$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$
$$= |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B|$$

例题

例题 10. 设 A, B, C, D 都是 n 级方阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

证. 因为
$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$
两边取行列式得,
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \\ &= |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| \\ &= |AD - CAA^{-1}B| \end{aligned}$$

例题

例题 10. 设 A,B,C,D 都是 n 级方阵, 且 $|A|\neq 0$, $AC=CA$. 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$.

证. 因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} \\ &= |A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B| \\ &= |AD-CAA^{-1}B| = |AD-CB|. \end{aligned}$$

□

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何？

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何？
2. $AC \neq CA$, 结论又如何？

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式,

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式, 因此, 存在实数 r 使得

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式, 因此, 存在实数 r 使得

$$f(x) = |xE + A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式,
因此, 存在实数 r 使得

$$f(x) = |xE + A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

因为 $AC = CA$, 所以 $(xE + A)C = C(xE + A)$.

例题

1. 若 $|A|=0, AC=CA$, 结论如何？
2. $AC\neq CA$, 结论又如何？

解. (1) 令 $f(x)=|xE+A|$, 则 $f(x)$ 是多项式，因此，存在实数 r 使得

$$f(x)=|xE+A|\neq 0, \forall\, x\geqslant r.$$

因为 $AC=CA$, 所以 $(xE+A)C=C(xE+A)$.

于是

例题

1. 若 $|A|=0, AC=CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x)=|xE+A|$, 则 $f(x)$ 是多项式, 因此，存在实数 r 使得

$$f(x)=|xE+A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

因为 $AC=CA$, 所以 $(xE+A)C=C(xE+A)$.

于是 $\begin{vmatrix} xE+A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(xE+A)D-CB|, \forall\, x \geqslant r.$

例题

1. 若 $|A| = 0, AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式,
因此，存在实数 r 使得

$$f(x) = |xE + A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

因为 $AC = CA$, 所以 $(xE + A)C = C(xE + A)$.

于是 $\begin{vmatrix} xE + A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(xE + A)D - CB|, \forall\, x \geqslant r.$

因此，上式是关于 x 的恒等式.

例题

1. 若 $|A| = 0$, $AC = CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x) = |xE + A|$, 则 $f(x)$ 是多项式,
因此，存在实数 r 使得

$$f(x) = |xE + A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

因为 $AC = CA$, 所以 $(xE + A)C = C(xE + A)$.

于是 $\begin{vmatrix} xE + A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(xE + A)D - CB|, \forall\, x \geqslant r.$

因此，上式是关于 x 的恒等式. 故当 $x = 0$ 时等式

也成立,

例题

1. 若 $|A|=0, AC=CA$, 结论如何?
2. $AC \neq CA$, 结论又如何?

解. (1) 令 $f(x)=|xE+A|$, 则 $f(x)$ 是多项式,
因此，存在实数 r 使得

$$f(x)=|xE+A| \neq 0, \forall\, x \geqslant r.$$

因为 $AC=CA$, 所以 $(xE+A)C=C(xE+A)$.

于是 $\begin{vmatrix} xE+A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(xE+A)D-CB|, \forall\, x \geqslant r.$

因此，上式是关于 x 的恒等式. 故当 $x=0$ 时等式
也成立， 即 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$ $\square$

例题

(2) 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

例题

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=CA,$

例题

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=CA$,

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=1,$$

例题

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=CA,$

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=1,$$

但是 $|AD-CB|=\begin{vmatrix}-1&-1\\0&0\end{vmatrix}=0.$ □

谢谢大家!

AUTHOR: 丁南庆
ADDRESS: 南京大学数学系
南京，210093
EMAIL: nqding@nju.edu.cn